Séquence 1 : raisonnement par récurrence et suites

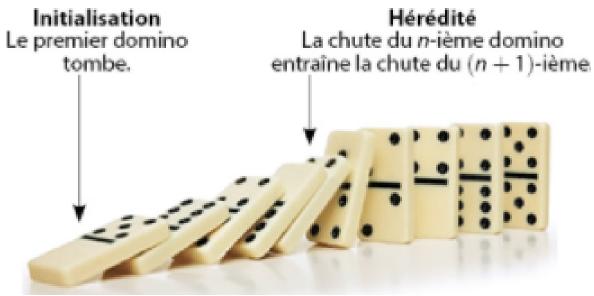
Chapitre 1 : comportement global et raisonnement par récurrence

1 Le raisonnement par récurrence

Une situation :

Quelles sont les deux conditions pour que TOUS les dominos se renversent ?

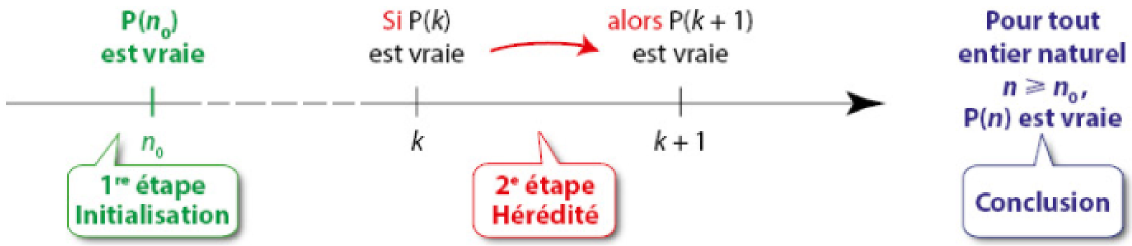
On renverse le premier domino et on s'assure que chaque domino renverse le suivant.



Principe du raisonnement par récurrence :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation :** $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
2. **Hérédité :** si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel $k \geqslant n_0$ quelconque, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie
3. **Conclusion :** alors, **pour tout entier naturel** $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



On se sert de ce type de raisonnement notamment pour établir des propriétés sur certaines suites.

2 Un exemple de rédaction

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_2 = 3 \\ \forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+3} \end{cases}$. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, on a $u_n = \dfrac{2^n+2}{2^n-2}$.

Initialisation : On vérifie la propriété pour $n = \ldots\ldots$

Hérédité :

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $u_n = \dfrac{2^n+2}{2^n-2}$. [hypothèse de récurrence]

On veut démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : ...

Conclusion :

2.1 Compléments sur les suites arithmétiques

Proposition. *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition. *La somme des termes d'une suite arithmétique est égale à :*

$$\boxed{S = \textit{Nombre de termes} \times \frac{\textit{1er terme} + \textit{Dernier terme}}{2}}$$

2.2 Compléments sur les suites géométriques

Proposition. *Soit q un réel quelconque et n un entier naturel.*

- *si $q \neq 1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*
- *la somme $1+q+q^2+\cdots+q^n$ est égale à $n+1$.*

Soit (v_n) une suite géométrique de raison Q.

Définition. *On note $S=\underbrace{v_k+v_{k+1}+\cdots+v_p}_{\textit{termes consécutifs}}$ la somme de termes consécutifs de la suite géométrique.*

$$\boxed{\text{S} = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1-Q^{\textit{nombre de termes de } S}}{1-Q}}$$

En particulier :

- $v_1+v_2+\cdots+v_n=v_1\times\frac{1-Q^{n+1}}{1-Q}$ *et*
- $v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\times\frac{1-Q^{n}}{1-Q}$

Exemple. *Soit (v_n) la suite géométrique de raison 3 et de terme initial $v_0=1$.*

Calculer : $S=v_6+v_7+\cdots+v_{12}$